

Nueva familia iterativa de sexto orden para la resolución de ecuaciones no lineales

Sixth new family method for solving nonlinear equations

William Alexander Ávila Aguilar

Universidad Técnica de Machala, Machala, Ecuador
Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación, Universidad Internacional de La Rioja, Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, España, Madrid, España
wavila@utmachala.edu.ec
<https://orcid.org/0000-0001-7577-3196>

Marcos Chacón Castro

Grupo de Investigación GIECI, Fundación Universitaria Internacional de la Rioja, Bogotá, Colombia
Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación, Universidad Internacional de La Rioja, Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, España, Madrid, España
marcos.chacon@unir.net
<https://orcid.org/0000-0001-7986-6322>

Freddy Geovanny Saldivia Monserrate

Universidad de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador
Máster Universitario en Ingeniería Matemática y Computación, Universidad Internacional de La Rioja, Escuela Superior de Ingeniería y Tecnología, España, Madrid, España
freddysaldiviam26@gmail.com
<https://orcid.org/0009-0008-7476-996X>

Recibido: 24/11/2025 - **Aceptado:** 06/01/2026 - **Publicado:** 22/01/2026

Autor de correspondencia: wavila@utmachala.edu.ec

Como citar: Ávila Aguilar, W. A. ., Chacón Castro, M. ., & Saldivia Monserrate, F. G. . (2026). Nueva familia iterativa de sexto orden para la resolución de ecuaciones no lineales. *DISCE. Revista Científica Educativa Y Social*, 3(1), 62-90. <https://doi.org/10.69821/DISCE.v3i1.69>

Esta obra está bajo una licencia internacional Creative Commons Atribución 4.0.



RESUMEN

Introducción. En este manuscrito, se introduce una familia iterativa multipaso diseñada para resolver ecuaciones no lineales.

Materiales y métodos. Se investigó profundamente el análisis de convergencia de esta nueva familia iterativa una vez definido el método multipunto y se demostró que su orden de convergencia fue 6 con su orden de convergencia computacional aproximado (ACOC) de 5.98 en la mayoría de las pruebas experimentales.

Resultados y discusión. Esta familia es derivada del esquema de Newton pero incluye una función “congelada” o peso para añadir un tercer paso en donde se usó inicialmente como primer paso el método iterativo de segundo orden de Newton para disminuir el número de evaluaciones funcionales.

Conclusiones. Finalmente se realizó con un conjunto de ecuaciones no lineales de investigaciones recientes pruebas numéricas donde se evaluó la eficacia de esta nueva familia verificando la cantidad de iteraciones para encontrar la solución aproximada de la ecuación no lineal en comparación con otros métodos ya propuestos de orden 6 obteniendo un costo computacional menor lo que permite a este esquema iterativo ser eficiente y novedoso.

Palabras clave: Ecuaciones no lineales, análisis de convergencia, método óptimo, recurso computacional.

ABSTRACT

Introduction. In this manuscript, we introduce a new multi-step iterative family designed to solve non linear equations.

Materials and Methods. Furthermore, we highly investigate the analysis of convergence from this new iterative family once the multi-step method was defined. We demonstrated that its order of convergence was 6 and its approximated computational order of convergence was 5.98 in majority of numerical experiments.

Results and Discussion. This family is derived from Newtons scheme, but it includes a “frozen” or weight function to add up a third step. Initially, we used as first iterative method the second order Newtons method with the aim to reduce the number of functional evaluations.

Conclusions. Finally, we chose a set of nonlinear equations from recent investigations with the aim to evaluate its efficacy from the new iterative family verifying the amount of iterations to find the approximate solution of the nonlinear equation in comparison to other already proposed sixth order methods achieving a lower computational cost which allow to be an efficient and novel iterative scheme.

Keywords: Nonlinear equations, convergence analysis, optimal method, computational resource.

INTRODUCCIÓN

La búsqueda de construir esquemas iterativos que permitan determinar soluciones de ecuaciones no lineales comprende un reto formidable en los dominios del análisis numérico y varias ciencias aplicadas. El significado de lograr un método que mejor se aproxime a la solución de un problema no lineal ha sido el fruto de numerosos trabajos de investigación que hasta la actualidad siguen vigentes y con el desarrollo de la tecnología se vuelve un desafío más competitivo. Por ello, el planteamiento de nuevos enfoques hacia esquemas iterativos para encontrar las raíces o soluciones de ecuaciones no lineales se rigen de forma general por la siguiente ecuación:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

en donde $D \subset \mathbb{R}, \forall x \in D$ y $F(x)$ es una regla de correspondencia o función no lineal.

Este planteamiento para encontrar las raíces o soluciones de problemas no lineales se aplica en distintas áreas de las ingenierías y matemáticas aplicadas, por ejemplo, en el área de mecánica de sólidos (Caporale et al., 2025) investigaron sobre procedimientos iterativos para analizar la elasticidad de nano platos por medio de formulaciones integro diferenciales bajo condiciones de frontera, logrando un método iterativo efectivo encontrando la solución estándar de problemas elásticos locales; métodos de transferencia de calor representan un papel importante en el análisis numérico para encontrar las soluciones de sus ecuaciones asociadas a fenómenos de turbulencia en el que por medio de un esquema iterativo llamado Método Característico (MOC) para Precursores de Neutrones Atrasados (DNPs) se utilizó para resolver una ecuación de balance precursora con difusión turbulenta en combustibles líquidos nucleares (Caprais & Bergeron, 2025b).

En el campo de la óptica, los modelos matemáticos que se pueden representar por ecuaciones no lineales resultan altamente complejos que necesitan ser linealizados por otros esquemas para aproximar numéricamente sus soluciones (Kozitskiy et al., 2022). Por otra parte, las ecuaciones no lineales que suelen necesitar otras representaciones matemáticas se conectan con matrices, por ende, los análisis vectoriales en los métodos numéricos requieren indagar formalmente su convergencia a la solución del sistema; (Pokusiński & Kamiński, 2023) desarrollaron un

algoritmo para determinar características de probabilidad básicas en variables aleatorias truncadas Gaussianas usando un método iterativo de perturbación estocástico generalizado de alto orden. Los modelos de Poisson son usados en las ciencias físicas abstractas para representar cargas eléctricas comprometiendo su naturaleza a funciones en derivadas parciales y para resolver o aproximar sus soluciones se utilizan métodos numéricos para integrales como Runge – Kutta, uno de los más famosos en estimaciones de integrales definidas; (Mohanty & Niranjana, 2024) tabularon resultados correspondientes a una familia compacta de orden seis en precisión para ecuaciones de Poisson de la forma $\Delta^2 u = f$ las cuales son muy requeridas en ingeniería y física.

En aplicaciones de sistemas dinámicos, particularmente en propagación de ondas, (Li & Guo, 2020) investigaron la solución numérica de los dominios sin restricción de las ecuaciones no lineales de Schrodinger desarrollando condiciones de frontera artificiales para utilizar eficientemente diferencias finitas probando rigurosamente la estabilidad del problema. Las ecuaciones de Burger se utilizan en fluidos No Newtonianos derivando sistemas dinámicos y para aproximar sus soluciones (Rawani et al., 2023) propusieron una técnica computacional por medio de derivadas espaciales aplicando ondas por goteo de Haar, una técnica que aproxima términos integrales por productos trapezoidales; ecuaciones integrales de dos dimensiones muy utilizadas en mecánica de sólidos, electrostática y transferencia de calor debido a su alta complejidad de cálculo, necesitan distintos esquemas de aproximación a sus soluciones pero con fórmulas de las cuadraturas de Gauss – Legendre se pueden determinar (Alipour & Mirzaee, 2020).

En general, el estudio de fenómenos físicos trata sobre ecuaciones diferenciales parciales no lineales (Ali et al., 2023) en el que la materia de encontrar sus soluciones es tan importante, extensa y ampliamente estudiada por distintos campos de aplicación, comparando un sin número de esquemas iterativos para alcanzar el número requerido de iteraciones que converjan al criterio del método (Solaiman et al., 2021). Por ejemplo, en la actualidad, la física cuántica, uno de los temas más intrigantes sobre la vida necesita enormemente del análisis numérico debido a la gran cantidad de expresiones no lineales con principios de incertidumbre que representan sus teorías sobre todo en la de la relatividad (Alipour & Mirzaee, 2020).

Los problemas que involucran ecuaciones no lineales son considerados por muchos investigadores como oportunidades para intentar mejor la aproximación a su solución, es por ello, que la cantidad de tiempo necesario para acercarse a su raíz es indispensable, y sus iteraciones son el tema de investigación de algunos esquemas específicos. Mientras menos iteraciones necesite un ejemplo de alta no linealidad, mejor es considerado el método iterativo; la convergencia hacia una solución del método es demostrada por medio de teoremas asociados a la diferenciabilidad de las funciones en cuestión, pero el parámetro que mejor describe esta característica del procedimiento es el ACOC (Aproximated Computational Order of Convergence), el cual es obtenido por pruebas experimentales en cada situación asociada a la no linealidad.

Muchos investigadores se han dedicado a analizar tanto de forma teórica como computacional el orden de convergencia de un proceso iterativo, (Zhanlav & Otgondorj, 2021) propusieron una nueva familia iterativa de métodos como el famoso de Jarrat el cual tiene un orden de convergencia cinco y seis acorde a su estructura con la que evidenciaron en casos especiales su aplicabilidad teniendo en cuenta que al ser una “familia” iterativa expresan el esquema en función de un solo parámetro generalizado; (Caprais & Bergeron, 2025a) desarrollaron una nueva familia de dos parámetros libres de cuarto orden para aproximar ecuaciones altamente no lineales analizando su rendimiento en la convergencia en el sentido la conjetura de Kung – Traub concluyendo que la familia propuesta fue óptima. La no linealidad en modelos matemáticos vinculados a un fenómeno físico conlleva a expresarlos en la mayoría de los casos en funciones polinómicas, pero encontrar sus soluciones analíticas se vuelve un problema demasiado complejo de tal manera que técnicas numéricas son buscadas para aproximar sus raíces (Nirmala & Kumbinarasaiah, 2024).

Las ecuaciones no lineales se pueden expresar en función de una única variable, a diferencia cuando son más de una incógnita se vuelven sistemas de ecuaciones y de igual manera los métodos numéricos puede aplicarse a una extensión de sistemas; (Erfanifar et al., 2020) desarrollaron un novedoso método iterativo de punto fijo para resolver matrices no lineales en la que su análisis de convergencia y existencia de solución fue derivado, (Ibrahim & Kumam, 2021) propusieron un método modificado para resolver sistemas de ecuaciones no lineales utilizando derivadas libres. En la mayoría de los casos, los planteamientos no lineales se investigan sobre

vecindades o intervalos debido a que las aproximaciones a la solución de la ecuación puedan tener resultados beneficiosos, por consiguiente, trazar la aproximación gráfica de la ecuación no lineal permite tener de cierta manera una idea más clara sobre su raíz o cero de la función.

En este trabajo se propuso una familia iterativa de tres pasos utilizando un parámetro libre, se analizó su convergencia y se desarrollaron pruebas numéricas; la estructura de esta investigación se elaboró de la siguiente manera: introducción, metodología, por último, conclusiones.

MATERIALES Y MÉTODOS

La investigación de esquemas iterativos en el análisis numérico radica en mejorar la rapidez de convergencia de las soluciones del problema no lineal, evaluar la eficacia computacional del método y su tiempo de ejecución para que la propuesta planteada tenga relevancia en campos de aplicación antes mencionados; las condiciones que permiten establecer al proceso como ideal se definen por teoremas generales analizando su comportamiento en la diferenciabilidad de funciones.

El esquema iterativo propuesto en este trabajo tuvo como primer paso o iteración al método de Newton, el segundo paso fue seleccionado de una investigación realizada por (Thangkhenpau et al., 2024) cuyo esquema iterativo se desarrolló para sistemas de ecuaciones no lineales y expresado para ecuaciones de la siguiente manera.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n = y_n - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{array} \right. \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

El esquema iterativo presentado por la ecuación (2) contiene dos pasos, uno definido por y_n y z_n ; se añadió un tercer paso para proponer un nuevo esquema iterativo:

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\
z_n &= y_n - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\
x_{n+1} &= z_n - \left[h_1 \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} + h_2 \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} + h_3 \frac{f'(y_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)} \right] \frac{f(z_n)}{f'(y_n)}.
\end{aligned} \tag{3}$$

en donde h_1, h_2, h_3 son parámetros libres que definen al proceso iterativo como una familia.

Definición 1. Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variable real. Entonces $f(x)$ con x que está en D puede representarse por medio de una serie de potencias de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{4}$$

Definición 2. Se llama a $S \subseteq \mathbb{R}$ como conjunto de convergencia para aquellos valores de x que están en S tal que la serie (4) es igual a un valor c que está en el rango de $f(x)$.

Definición 3. Se denominan raíces de $f(x)$ a todos los valores s que están en su conjunto de convergencia de tal forma que $f(s) = 0$.

Teorema 1. Sea f una función cuya $(n + 1)$ –ésima derivada $f^{n+1}(x)$ para cada x en un intervalo I que contiene a a . Entonces para cada x en I ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + O_n(x) \tag{5}$$

donde el residuo o error $O_n(x)$ está dado por la fórmula

$$O_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} \tag{6}$$

y c es algún punto entre x y a .

Demostración. Se puede escoger cualquier valor aleatorio n para demostrar que la función de su error está representada como (6). Sea $f(x)$ una función de variable real que puede expresarse como:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + O_n(x) \quad (7)$$

Considerando que un punto x y a sean constantes cualesquiera y definiendo una nueva función g sobre I como:

$$\begin{aligned} & g(t) \\ = & f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)(x-t)^2}{2!} - \frac{f'''(t)(x-t)^3}{3!} - \frac{f^4(t)(x-t)^4}{4!} - \dots \\ & - O_n(x) \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \end{aligned} \quad (8)$$

Reemplazando para $x=0$ en $g(t)$ se tiene que $g(x) = 0$ y reemplazando para a :

$$\begin{aligned} & g(a) \\ = & f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} - \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} - \frac{f^4(a)(x-a)^4}{4!} \\ & - \dots - O_n(x) \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}} \end{aligned} \quad (9)$$

$$g(a) = O_n(x) - O_n(x) = 0 \quad (10)$$

Debido a que x y a son puntos en el intervalo I con la propiedad de que $g(a) = g(x) = 0$, se puede aplicar el teorema del valor medio para derivadas. Por tanto, existe un número real c entre x y a tal que $g'(c) = 0$. En consecuencia,

$$0 = g'(c) = -\frac{1}{n!}(x-c)^n f^{n+1}(c) + (n+1)O_n(x) \frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} \quad (11)$$

Se concluye que,

$$(n+1)O_n(x) \frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{n!}(x-c)^n f^{n+1}(c) \quad (12)$$

$$O_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (13)$$

Teorema 2. Suponga la función $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es suficientemente diferenciable en D la cual contiene una raíz α de $f(s) = 0, \forall s \in D$. Asumiendo que $f'(\alpha) \neq 0$, entonces la familia iterativa (3) converge a α con un orden correspondiente de 6 si $h_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h_1\right), h_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}h_1\right), h_4 = -2h_1, h_1 \in \mathbb{R}$ y su ecuación del error está dada por

$$e_{n+1} = \frac{1}{4}C_2(2(4 + \alpha)C_2^2 - 5C_3)C_3e_n^6 + O(e_n^7) \quad (14)$$

donde $C_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, e_n = x_n - \alpha$

Demostración. Al realizar una expansión de Taylor para $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ en torno a α se obtiene:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}f^{iv}(\alpha)(x_n - \alpha)^4 + \frac{1}{5!}f^v(\alpha)(x_n - \alpha)^5 + \frac{1}{6!}f^{vi}(\alpha)(x_n - \alpha)^6 \\ &\quad + O((x_n - \alpha)^7), \text{ donde } O((x_n - \alpha)^7) = \frac{f^{vii}(c)}{7!}(x_n - \alpha)^7, c \text{ está entre } x_n \text{ y } \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \frac{1}{4!}f^{iv}(\alpha)e_n^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!}f^v(\alpha)e_n^5 + \frac{1}{6!}f^{vi}(\alpha)e_n^6 + O(e_n^7), \end{aligned} \quad (15)$$

$$f(x_n) = f'(\alpha) \left(e_n + \frac{1}{2!} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^2 + \frac{1}{3!} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^3 + \frac{1}{4!} \frac{f^{iv}(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^4 + \frac{1}{5!} \frac{f^v(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^5 + \frac{1}{6!} \frac{f^{vi}(\alpha)}{f'(\alpha)} e_n^6 + O(e_n^7) \right), \quad (16)$$

Dejando como $C_j = \frac{f^{(j)}(\varepsilon)}{f'(\varepsilon)}, j = 2, 3, \dots, 6$ se puede expresar (16) como

$$f(x_n) = f'(\varepsilon)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + C_5e_n^5 + C_6e_n^6 + O(e_n^7)), \quad (17)$$

Al derivar la expresión (17) con respecto a x :

$$\frac{d}{dx}f(x_n) = \frac{d}{dx} \left[f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \frac{1}{4!}f^{iv}(\alpha)e_n^4 + \frac{1}{5!}f^v(\alpha)e_n^5 + \frac{1}{6!}f^{vi}(\alpha)e_n^6 + O(e_n^7) \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x_n) &= \frac{d}{dx}f(\alpha) + \frac{d}{dx}f'(\alpha)e_n + \frac{d}{dx}\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2 + \frac{d}{dx}\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3 + \frac{d}{dx}\frac{1}{4!}f^{iv}(\alpha)e_n^4 \\ &\quad + \frac{d}{dx}\frac{1}{5!}f^v(\alpha)e_n^5 + \frac{d}{dx}\frac{1}{6!}f^{vi}(\alpha)e_n^6 + \frac{d}{dx}O(e_n^7), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f'''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!}f^{iv}(\alpha)e_n^3 + \frac{1}{4!}f^v(\alpha)e_n^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!}f^{vi}(\alpha)e_n^5 + \frac{1}{6!}f^{vii}(\alpha)e_n^6 + O(e_n^6), \end{aligned} \quad (20)$$

$$f'(x_n) = f'(\alpha) \left(1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{1}{3!}\frac{f^{iv}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{1}{4!}\frac{f^v(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^4 + \frac{1}{5!}\frac{f^{vi}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^5 + \frac{1}{6!}\frac{f^{vii}(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^6 + O(e_n^6) \right), \quad (21)$$

Se puede expresar (21) para $C_j = \frac{f^j(\varepsilon)}{f'(\varepsilon)}$, $j = 2, 3, \dots, 6$ como

$$f'(x_n) = f'(\varepsilon)(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + 5C_5e_n^4 + 6C_6e_n^5 + O(e_n^6)), \quad (22)$$

Al dividir las expresiones (8) y (22) se consigue la representación:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= e_n - C_2e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (-8C_2^3 + C_2(4C_2^2 - 3C_3) + 10C_2C_3 - 3C_4)e_n^4 \\ &\quad + \left(16C_2^4 - 36C_2^2C_3 + (4C_2^2 - 3C_3)C_3 + 9C_3^2 + C_2(-8C_2^3 + 12C_2C_3 - 4C_4) \right. \\ &\quad \left. + 14C_2C_4 - 4C_5 \right) e_n^5 \\ &\quad + \left(\begin{aligned} &-32C_2^5 + 96C_2^3 - 54C_2C_3^2 + C_3(-8C_2^3 + 12C_2C_3 - 4C_4) \\ &-48C_2^2C_4 + (4C_2^2 - 3C_3)C_4 + 24C_3C_4 + \\ &C_2(16C_2^4 - 36C_2^2C_3 + 9C_3^2 + 16C_2C_4 - 5C_5) + 18C_2C_5 - 5C_6 \end{aligned} \right) e_n^6, \\ &\quad + O(e_n^7) \end{aligned} \quad (23)$$

Al sustituir (23) en el primer paso de la familia (3) se obtiene

$$\begin{aligned}
y_n - \alpha &= C_2 e_n^2 + (-2C_2^2 + 2C_3) e_n^3 + (4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_n^4 + \\
&\quad (-8C_2^4 + 20C_2^2 C_3 - 6C_3^2 - 10C_2 C_4 + 4C_5) e_n^5 \\
&+ (16C_2^5 - 52C_2^3 C_3 + 28C_2^2 C_4 - 17C_3 C_4 + C_2(33C_3^2 - 13C_5) + 5C_6) e_n^6 \\
&\quad + O(e_n^7), \tag{24}
\end{aligned}$$

Si se utiliza la expresión (22) para $f'(y_n)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
f'(y_n) &= f'(\varepsilon) + 2f'(\varepsilon)C_2^2 e_n^2 + 2f'(\varepsilon)C_2(-2C_2^2 + 2C_3) e_n^3 + \\
&\quad (3f'(\varepsilon)C_2^2 C_3 + 2f'(\varepsilon)C_2(4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4)) e_n^4 \\
&+ (6f'(\varepsilon)C_2 C_3(-2C_2^2 + 2C_3) + 2f'(\varepsilon)C_2(-8C_2^4 + 20C_2^2 C_3 - 6C_3^2 - 10C_2 C_4 + 4C_5)) e_n^5 \\
&\quad + (4f'(\varepsilon)C_2^3 C_4 + 3f'(\varepsilon)C_3((-2C_2^2 + 2C_3)^2 + 2C_2(4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4)) \\
&\quad + 2f'(\varepsilon)C_2(16C_2^5 - 52C_2^3 C_3 + 28C_2^2 C_4 - 17C_3 C_4 + C_2(33C_3^2 - 13C_5) + 5C_6)) e_n^6 \\
&\quad + O(e_n^7), \tag{25}
\end{aligned}$$

Al dividir las expresiones (17) y (25) se consigue

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n)}{f'(y_n)} &= e_n + C_2 e_n^2 + (-2C_2^2 + C_3) e_n^3 + (2C_2^3 - 4C_2 C_3 + C_4) e_n^4 \\
&\quad + (-4C_2^4 + 9C_2^2 C_3 + C_2(4C_2^3 - 4C_2 C_3) - 6C_2 C_4 + C_5) e_n^5 \\
&\quad + \left(\begin{aligned} &-12C_2^3 C_3 + C_3(4C_2^3 - 4C_2 C_3) + 18C_2^2 C_4 + \\ &C_2(-4C_2^4 + 11C_2^2 C_3 - 6C_2 C_4) - 8C_2 C_5 + C_6 \end{aligned} \right) e_n^6 \\
&\quad + O(e_n^7), \tag{26}
\end{aligned}$$

Se define el tercer paso para z_n como

$$\begin{aligned}
z_n - \varepsilon = & \left(-2C_2^2 + \frac{1}{2}(4C_2^2 - 3C_3) + 2C_3 \right) e_n^3 + \\
& \left(4C_2^3 - 7C_2C_3 + \frac{1}{2}(-10C_2^3 + C_2(4C_2^2 - 3C_3) + 14C_2C_3 - 4C_4) + 3C_4 \right) e_n^4 \\
& + \left(\begin{aligned} & -8C_2^4 + 20C_2^2C_3 - 6C_3^2 - 10C_2C_4 \\ & + \frac{1}{2} \left(20C_2^4 - 45C_2^2C_3 + (4C_2^2 - 3C_3)C_3 + 9C_3^2 - C_2(4C_2^3 - 4C_2C_3) \right) \\ & + C_2(-8C_2^3 + 12C_2C_3 - 4C_4) + 20C_2C_4 - 5C_5 \end{aligned} \right) + 4C_5 \Big) e_n^5 \\
& + \left(\begin{aligned} & 16C_2^5 - 52C_2^3C_3 + 28C_2^2C_4 - 17C_3C_4 + C_2(33C_3^2 - 13C_5) \\ & + \frac{1}{2} \left(-32C_2^5 + 108C_2^3C_3 - 54C_2C_3^2 - C_3(4C_2^3 - 4C_2C_3) \right) \\ & + C_3(-8C_2^3 + 12C_2C_3 - 4C_4) - 66C_2^2C_4 \\ & + (4C_2^2 - 3C_3)C_4 + 24C_3C_4 \\ & - C_2(-4C_2^4 + 11C_2^2C_3 - 6C_2C_4) \\ & + C_2(16C_2^4 - 36C_2^2C_3 + 9C_3^2 + 16C_2C_4 - 5C_5) + 26C_2C_5 - 6C_6 \end{aligned} \right) e_n^6, \\
& + O(e_n^7)
\end{aligned} \tag{27}$$

Al analizar los términos para relacionar con el tercer paso de la familia (3) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}
\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} = & 1 - 2C_2e_n + (6C_2^2 - 3C_3)e_n^2 + (-12C_2^3 - 4C_2(C_2^2 - C_3) + 12C_2C_3 - 4C_4)e_n^3 \\
& + \left(\begin{aligned} & 16C_2^4 + 2C_2^2(4C_2^2 - 3C_3) + 8C_2^2(C_2^2 - C_3) - 36C_2^2C_3 + 9C_3^2 + 16C_2C_4 \\ & + C_2(8C_2^3 - 11C_2C_3 + 6C_4) - 5C_5 \end{aligned} \right) e_n^4 \\
& + \left(\begin{aligned} & -32C_2^5 - 4C_2(4C_2^2 - 3C_3)(C_2^2 - C_3) + 96C_2^3C_3 - 54C_2C_3^2 \\ & + 2C_2^2(-8C_2^3 + 12C_2C_3 - 4C_4) - 48C_2^2C_4 + 24C_3C_4 \\ & - 2C_2^2(8C_2^3 - 11C_2C_3 + 6C_4) - 4C_2(4C_2^4 - 7C_2^2C_3 + 5C_2C_4 - 2C_5) \\ & + 20C_2C_5 - 6C_6 \end{aligned} \right) e_n^5, \\
& + O(e_n^6)
\end{aligned} \tag{28}$$

De la misma manera al dividir las expresiones (22) y (25) se define

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} = & 1 + 2C_2e_n + (-2C_2^2 + 3C_3)e_n^2 \\
& + (-4C_2C_3 + 4C_4)e_n^3 + (-4C_2^4 + 5C_2^2C_3 + 2C_2(4C_2^3 - 4C_2C_3) - 6C_2C_4 + 5C_5)e_n^4 \\
& + \left(\begin{aligned} & -12C_2^3C_3 + 3C_3(4C_2^3 - 4C_2C_3) + 12C_2^2C_4 \\ & + 2C_2(-4C_2^4 + 11C_2^2C_3 - 6C_2C_4) - 8C_2C_5 + 6C_6 \end{aligned} \right) e_n^5, \\
& + O(e_n^6)
\end{aligned} \tag{29}$$

La función $f(x)$ en el punto z_n por su desarrollo en series de Taylor se puede representar como

$$\begin{aligned}
f(z_n) &= \frac{1}{2}f'(\alpha)C_3e_n^3 + f'(\alpha)\left(C_2^3 - \frac{3C_2C_3}{2} + C_4\right)e_n^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}(f'(\alpha)(8C_2^4 - 15C_2^2C_3 + 6C_3^2 + 4C_2C_4 - 3C_5))e_n^5 \\
&\quad + \frac{1}{4}f'(\alpha)\left(40C_2^5 - 110C_2^3C_3 + 32C_2^2C_4 - 34C_3C_4 + 5C_2(15C_3^2 - 2C_5) + 8C_6\right)e_n^6 \\
&\quad + O(e_n^7),
\end{aligned} \tag{30}$$

Al dividir las expresiones (30) y (25)

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_n)}{f'(y_n)} &= \frac{C_3e_n^3}{2} + \left(C_2^3 - \frac{3C_2C_3}{2} + C_4\right)e_n^4 \\
&\quad + \left(-C_2^2C_3 + \frac{1}{2}(-8C_2^4 + 15C_2^2C_3 - 6C_3^2 - 4C_2C_4 + 3C_5)\right)e_n^5 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}C_3(4C_2^3 - 4C_2C_3) - 2C_2^2\left(C_2^3 - \frac{3C_2C_3}{2} + C_4\right) + \frac{1}{4}(40C_2^5 - 110C_2^3C_3 + 32C_2^2C_4 - 34C_3C_4 + 5C_2(15C_3^2 - 2C_5) + 8C_6)\right)e_n^6 \\
&\quad + O(e_n^7),
\end{aligned} \tag{31}$$

Finalmente se pueden utilizar las expresiones (22), (25), (28), (29) y (31) para reemplazar en el tercer y último paso con $h_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h_1\right)$, $h_3 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}h_1\right)$, $h_4 = -2h_1$ para determinar la ecuación del error por

$$e_{n+1} = \frac{1}{4}C_2(2(4 + \alpha)C_2^2 - 5C_3)C_3e_n^6 + O(e_n^7), \tag{32}$$

Esta demostración prueba que la familia iterativa definida por (3) tiene un orden de convergencia seis h_1 en el conjunto de los números reales.

Validación del método

La demostración del método en su orden de convergencia permitió que la familia iterativa pueda realizar aproximaciones numéricas a ejemplos prácticos de ecuaciones no lineales para encontrar su ACOC; cada

aproximación a la solución del problema no lineal tuvo su cantidad de iteraciones correspondientes, así, mientras menor sea el número de intentos hacia la solución, mejor es el método iterativo, y para ello, se seleccionó otros dos métodos iterativos de orden de convergencia seis para realizar una comparativa, analizar la efectividad del método y su optimización de recursos computacionales.

Los métodos iterativos se consideran óptimos por el número de evaluaciones funcionales, en este caso, el método propuesto en este trabajo contiene cuatro evaluaciones funciones; la expresión matemática que permite establecer como método óptimo es la cota 2^{d-1} donde d es el número de evaluaciones funcionales. Las comparativas que se pueden realizar entre los métodos permiten verificar el rendimiento de una nueva propuesta, por ejemplo, (Usman et al., 2025) propuso un novedoso esquema iterativo multipaso realizando comparaciones con otros cuatro métodos, uno de ellos fue desarrollado en el año 2012.

El método propuesto por Sharma – Sharma – Karla encontrado en la investigación de (Thangkhenpau et al., 2024) que en este trabajo se lo abrevió como SSKM6 tiene un orden de convergencia seis y está dado por el esquema:

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
 z_k &= x_k - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f'(x_k)} + \frac{1}{f'(y_k)} \right) * f(x_k) \\
 x_{k+1} &= z_k - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{f'(x_k)} + \left(\frac{\left(\frac{f'(x_k)}{f'(y_k)} \right)}{f'(y_k)} \right) * f(z_k) \right].
 \end{aligned} \quad k = 0,1,2 \dots \quad (33)$$

El método propuesto por (Cordero et al., 2010) responde a un orden de convergencia seis, se lo abrevió como MK6 y tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned}
y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\
z_k &= x_k - \left[\left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right) * \left(\frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(y_k)} \right) \right] \\
x_{k+1} &= z_k - \frac{f(z_k)}{\frac{f(y_k) - f(z_k)}{(z_k - y_k)} + \frac{\frac{f(x_k) - f(z_k)}{x_k - z_k} - f'(x_k)}{z_k - x_k} * (z_k - y_k)}, \quad k = 0,1,2 \dots \quad (34)
\end{aligned}$$

Para la validación del método se escogió una muestra de cinco funciones de variable real de trabajos de investigación asociados a ecuaciones no lineales, tres funciones no lineales de (Özban & Kaya, 2022) con sus raíces aproximadas, una función de (Sharma & Panday, 2022), y una última de (Kodnyanko, 2021); se muestra a continuación el conjunto de prueba seleccionado:

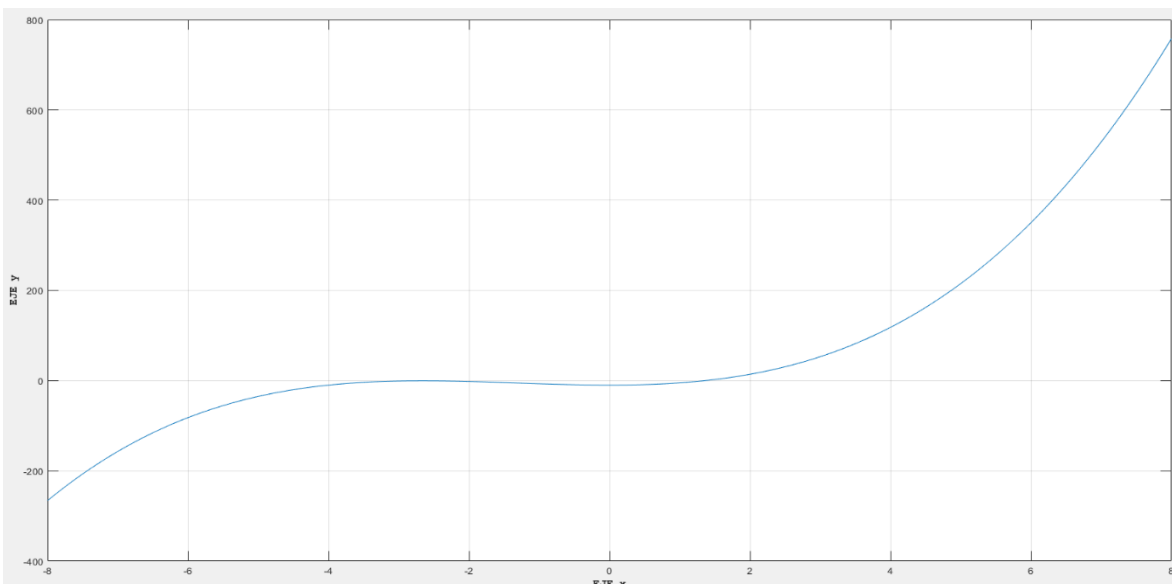
Tabla 1. Muestra de problemas no lineales para validación de método.

Ecuación no lineal	Raíces
$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$	$\omega \approx 1.36523$
$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2 = 0$	$\omega \approx 0.25753$
$f_3(x) = (\sin x)^2 - x^2 + 1 = 0$	$\omega \approx 1.40449$
$f_4(x) = x^3 - 10 = 0$	$\omega \approx 2.15443$
$f_5(x) = x^2 \cos(2x) - 10 = 0$	$\omega \approx 3.16384$

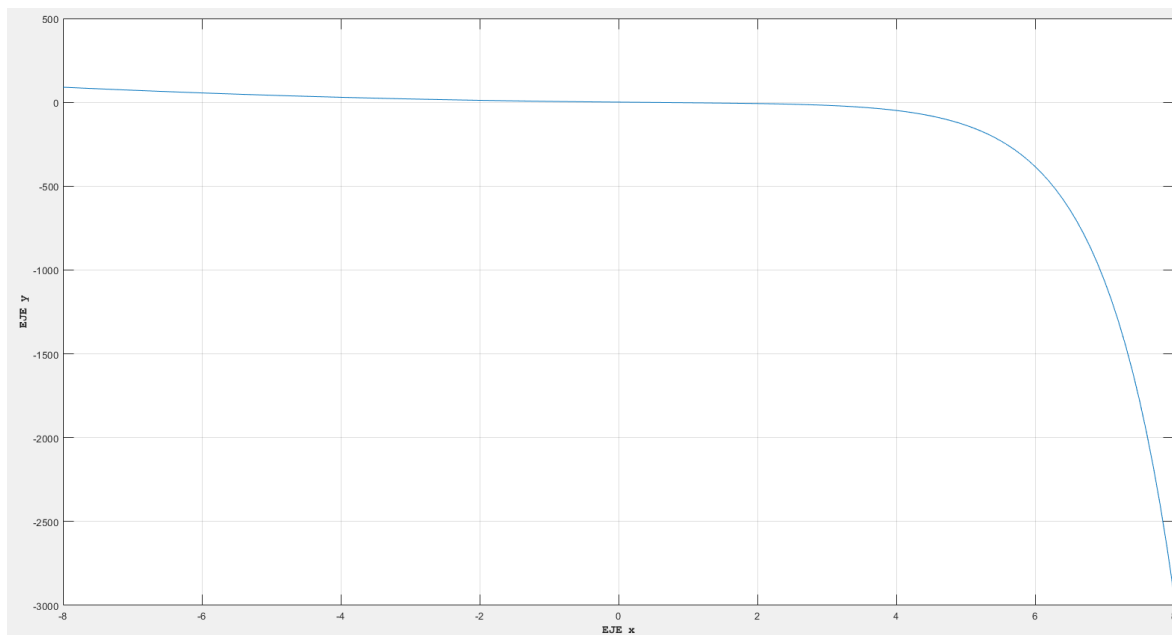
Nota: Creación propia

Los problemas seleccionados de la tabla 1 muestran sus raíces aproximadas, es decir, al evaluar el valor ω en cada función se aproxima a la igualdad, aunque para proporcionar una mejor visualización de sus soluciones se graficó cada una de las representaciones no lineales que proporcionó un camino más factible desde el punto de vista geométrico para la comparativa con los otros dos métodos iterativos; las gráficas de las funciones no lineales se ilustran a continuación:

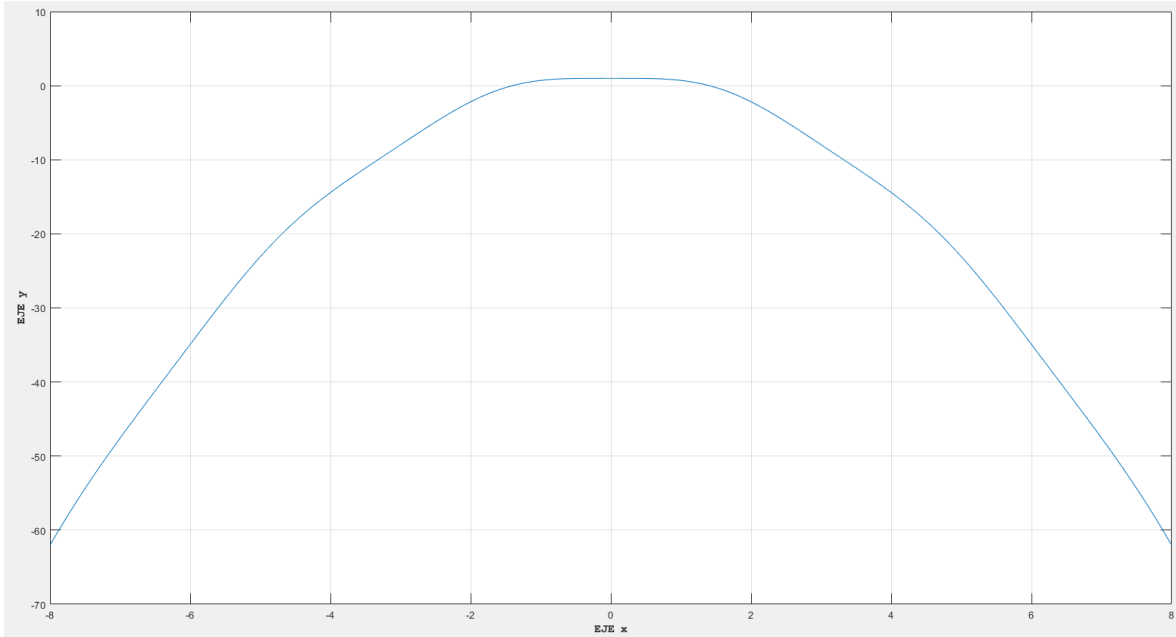
Grafica 1. Regla de correspondencia para $f_1(x)$



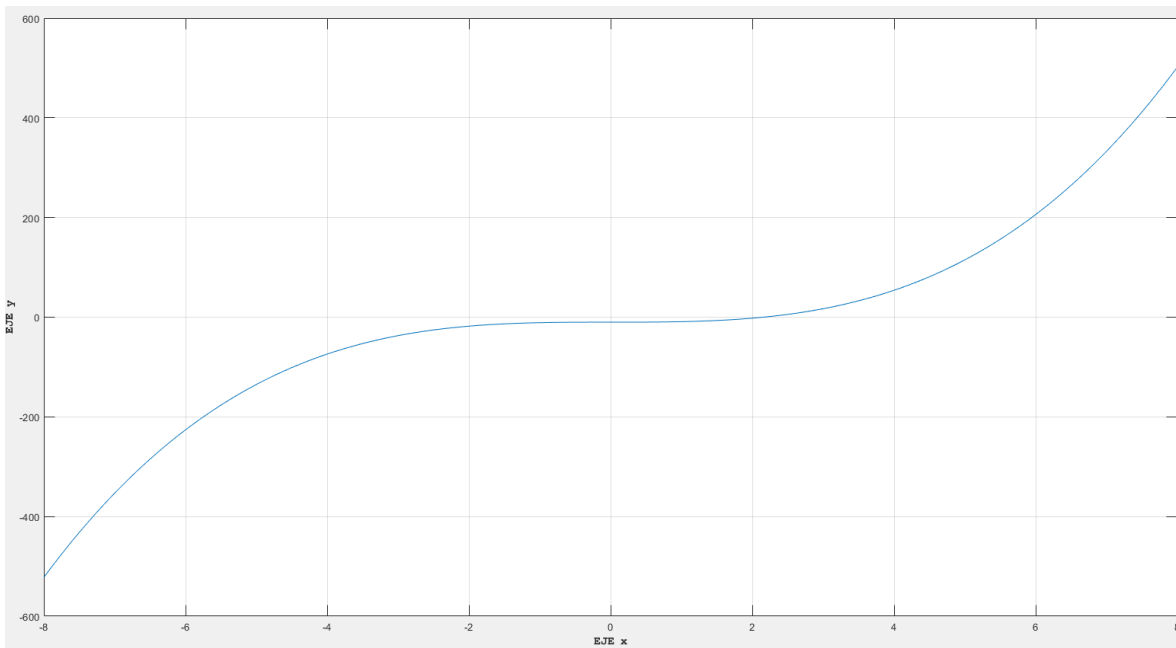
Gráfica 2. Regla de correspondencia para $f_2(x)$



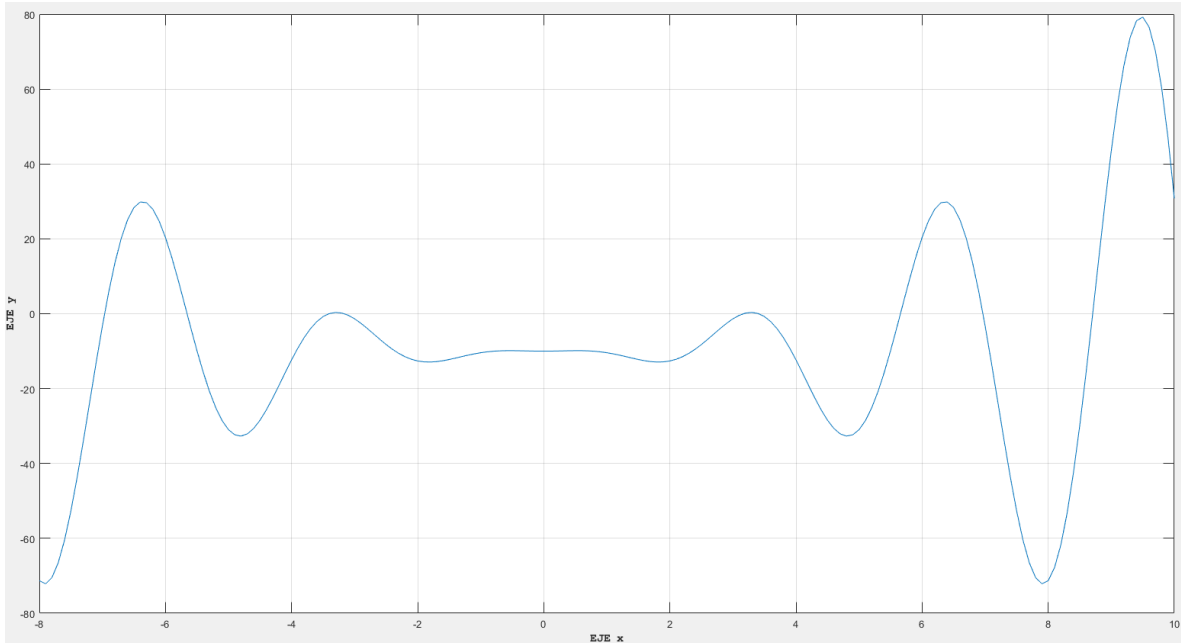
Gráfica 3. Regla de correspondencia para $f_3(x)$.



Gráfica 4. Regla de correspondencia para $f_4(x)$.



Gráfica 5. Regla de correspondencia para $f_5(x)$



Pruebas experimentales

Para la verificación del desarrollo computacional del método se utilizó como herramienta el programa Matlab R2024a con una precisión significativa en cada iteración de 500 dígitos, con una tolerancia de 10^{-100} y un máximo de veinte iteraciones; los métodos que se realizó la comparativa en su eficacia contienen derivadas de orden 1, por tanto, la programación incluye nuevas funciones que deben añadirse a cada esquema lo que representa un costo computacional mayor en donde el tiempo de ejecución también se estimó. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para cada función:

Tabla 1. Prueba numérica para $f_1(x)$.

		$h_1 = 0$					
Valor inicial de prueba x_0	V todo	Mé	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	Iteraciones	COC	Ampo de ejecución
0.1	FA	2.7326	2.3255	20	6.00	0.8413	
	3PAS		$\times 10^{-33}$	$\times 10^{-507}$			

0.1		MK	3.0721	1.9502	6	5.99	0.4112
	6		$\times 10^{-10}$	$\times 10^{-652}$			
0.1		SS	2.7326	2.3255	20	6.00	0.8284
	KM6		$\times 10^{-33}$	$\times 10^{-507}$			

Tabla 2. Prueba numérica para $f_2(x)$.

$h_1 = 0$								
Valor inicial de prueba x_0	V todo	Mé	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	Iteraciones	COE	A	Tiempo de ejecución
-2		FA	5.1629	5.8137	4	5.99		0.7487
	3PAS		$\times 10^{-12}$	$\times 10^{-508}$				
-2		MK	1.4973	0.0	4	5.99		0.3777
	6		$\times 10^{-12}$					
-2		SS	5.1629	0.0	4	5.99		0.3690
	KM6		$\times 10^{-12}$					

Tabla 3. Prueba numérica para $f_3(x)$.

$h_1 = 0$								
Valor inicial de prueba x_0	V todo	Mé	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	Iteraciones	COE	A	Tiempo de ejecución
4		FA	0.0	0.0	5	5.99		0.7487
	3PAS							
4		MK	2.1777	3.7976	5	5.99		0.6952
	6		$\times 10^{-30}$	$\times 10^{-708}$				
4		SS	0.0	0.0	5	5.99		0.7165
	KM6							

Tabla 4. Prueba numérica para $f_4(x)$.

$h_1 = 0$								
Valor inicial de prueba x_0	V todo	Mé	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	Iteraciones	COE	A	Tiempo de ejecución

6	FA	1.3773	2.3255	5	6.00	0.6439
	3PAS	$\times 10^{-17}$	$\times 10^{-507}$			
6	MK	2.5102	6.0762	5	5.99	0.6417
	6	$\times 10^{-21}$	$\times 10^{-707}$			
6	SS	1.3773	2.3255	5	6.00	0.5928
	KM6	$\times 10^{-17}$	$\times 10^{-507}$			

Tabla 5. Prueba numérica para $f_5(x)$.

Valor inicial de prueba x_0	V todo	Método	$h_1 = 0$		Iteraciones	A COC	Tiempo de ejecución
			$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $			
3	FA	1.8012	2.3255	4	5.99	0.7501	
	3PAS	$\times 10^{-18}$	$\times 10^{-507}$				
3	MK	3.43104	0.0	4	5.99	0.3557	
	6	$\times 10^{-15}$					
3	SS	1.8012	2.3255	4	5.99	0.3354	
	KM6	$\times 10^{-18}$	$\times 10^{-507}$				

Las tablas comparan el método propuesto con otros ya existentes para resolver ecuaciones no lineales con rasgos hallados bastante importantes, por ejemplo, en la tabla 1 el método propuesto converge a seis unidades lo cual en la demostración teórica se verificó, pero el número de iteraciones es mayor, por ende el tiempo de ejecución se incrementó, a diferencia del método MK6 con un tiempo de ejecución reducido casi a su mitad; en la tabla 2 el método propuesto aproxima la raíz del problema no lineal sin embargo su tiempo de ejecución es mayor en comparación con MK6 y SSKM6. El método propuesto entregó eficiencia en la evaluación para la función $f_3(x)$ en comparación con MK6 debido al valor cero entregado en los puntos próximo a la solución aproximada del ejemplo con un valor ACOC de 5.99.

Taller práctico

El método propuesto en este trabajo de investigación se lo implementará en una práctica con un grupo de estudiantes de la Universidad Técnica de Machala, los cuales cursarán la materia de Análisis Numérico pertenecientes a la carrera de Ingeniería Química en el periodo

2026 – 1; el método iterativo de segundo orden de Newton es uno de los primeros pasos que un estudiante de pregrado tiene que estudiar para que sus conocimientos en el campo de la no linealidad puedan ir respondiendo a problemas de la vida real. En la figura adjunta se ilustra el contenido de estudio tienen que cursar para la materia:

Gráfica 6. Contenido de estudio para la materia de Análisis Numérico.

4.- Estructura de la asignatura		
4.1 Estructura de las unidades didácticas		
UNIDADES DIDÁCTICAS DE LA ASIGNATURA		
NOMBRE	CONTENIDOS DE APRENDIZAJE	RESULTADOS DE APRENDIZAJE
I. I. ANALISIS NUMÉRICO	<ul style="list-style-type: none"> Algoritmos, errores y técnicas sencillas de redondeo. 	Determina las cifras significativas y los tipos de errores presentes en distintos procesos que se dan en la industria
II. II. ECUACIONES ALGEBRAICA NO LINEALES.	<ul style="list-style-type: none"> Resolución Numérica de Ecuaciones No Lineales: Métodos Iterativos, Convergencia Lineal y Cuadráticas. 	Resuelve sistemas de ecuaciones no lineales empleando distintos métodos a fin de emplearlos en los procesos de ingeniería
	<ul style="list-style-type: none"> Mínimos cuadrados 	Realiza procesos de regresión por mínimos cuadrados, mediante los métodos numéricos

Actividad 1

Grafique las siguientes ecuaciones no lineales y establezca un intervalo solución:

$$p(x) = x^3 - \cos\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = 0 \quad (35)$$

$$g(x) = x^5 - \sin(x^3) + 1.5 = 0 \quad (36)$$

Actividad 2

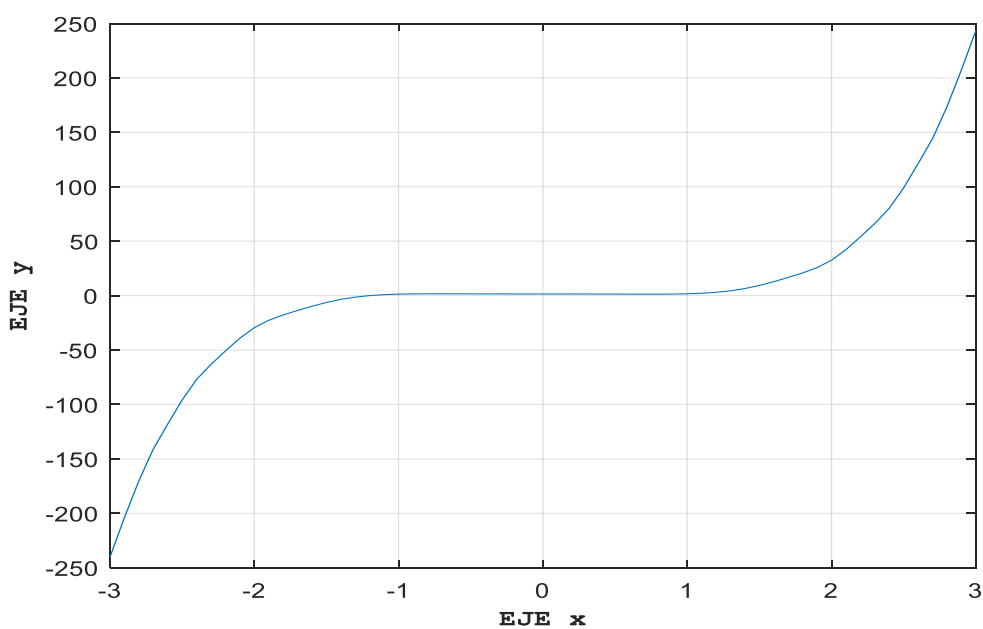
Aproxime la solución es las ecuaciones no lineales de la actividad 1 con una tolerancia de 10^{-300} y con un máximo de veinte iteraciones utilizando el software Matlab 2024a.

Muestra de algunas actividades desarrolladas por los estudiantes

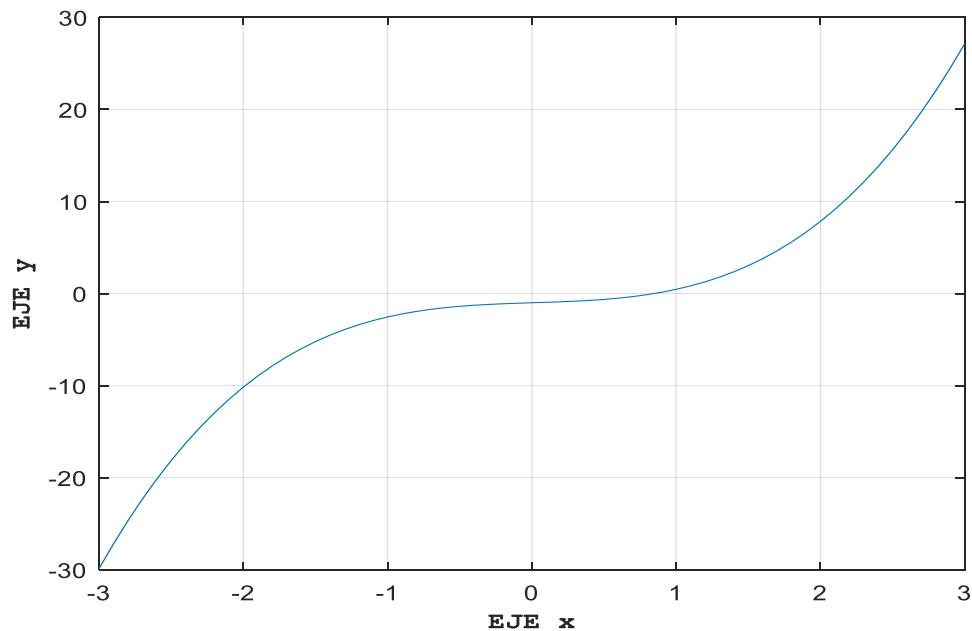
Los estudiantes realizaron el taller de forma grupal con una estructura de programa computacional ya brindada por el docente para que el desarrollo del problema tenga un fin común, aproximar la solución de ecuaciones no lineales. Los cálculos que deben tener en consideración primordialmente los alumnos son las funciones tanto de primeras como segundas derivadas y dichas funciones son determinadas en papel ya que son conocimientos que los estudiantes deben tener previamente conocidos.

En la gráfica 7 se puede observar la regla de correspondencia para $g(x)$ en el intervalo de $(-3,3)$ y su solución aproximada se encuentra en la vecindad del intervalo $(-2,-1)$; esta aproximación permite tener una referencia y clara evidencia de que el programa pueda ejecutarse correctamente. El problema radica en la estructura de la familia iterativa ya que, en algunos casos, internamente el programa puede realizar iteraciones que no converjan a la solución, por ende, se debe modificar la tolerancia del método; con un total de veinte iteraciones se puede tener una estimación bastante aceptable hacia la aproximación de la raíz de la ecuación no lineal.

Gráfica 7. Regla de correspondencia para $g(x)$.



Gráfica 8. Regla de correspondencia para $p(x)$



En la gráfica 8 se puede observar un comportamiento diferente respecto a la solución aproximada de la ecuación no lineal para $p(x)$, su raíz se encuentra en un intervalo de valores positivos (0,1) en donde los métodos iterativos en este trabajo de investigación utilizaron una estimación inicial de $x_0 = 0.1$ para esta función y su programa numérico, de acuerdo con el número de iteraciones definido logre converger al cero de la función no lineal. A diferencia de la función $g(x)$, los valores que se encuentran en el eje vertical son de órdenes pequeños, pero no significa que la norma de la función no lineal en la última iteración este alejada del valor numérico cero.

En la actividad 2, se realizó la ejecución del programa de Matlab con una estructura fija en donde el único cambio corresponde a la función de entrada para encontrar su raíz aproximada, por ejemplo, para la función $p(x)$, su dato adicional conlleva a encontrar la función $p'(x)$ debido a que los esquemas iterativos requieren ese dato, pero con los conocimientos adquiridos de los estudiantes en cursos previos de cálculo, esto no es un impedimento, por ello, $p'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \sin x^{\frac{1}{2}}$. Las funciones de las derivadas permiten que el programa numérico pueda correr sin ningún problema o requerimiento de información adicional. En la tabla 6 y 7 se

obtuvieron las raíces aproximadas de las funciones $p(x)$ y $g(x)$, respectivamente.

Tabla 6. Solución aproximada $g(x)$.

FA3PAS para $g(x)$			
Solución	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	ACOC
aprox.			
-1.199941	6.06×10^{-194}	5.81×10^{-508}	5.99
MK6 para $g(x)$			
Solución	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	ACOC
aprox.			
-1.199941	1.88×10^{-259}	7.59×10^{-708}	6.00
SSKM6 para $g(x)$			
Solución	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	ACOC
aprox.			
-1.199941	6.06×10^{-194}	5.81×10^{-508}	5.99

Tabla 7. Solución aproximada $p(x)$.

FA3PAS para $g(x)$			
Solución	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	ACOC
aprox.			
0.8461	1.61×10^{-493}	1.45×10^{-508}	5.99
MK6 para $g(x)$			
Solución	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	ACOC
aprox.			
0.8461	1.38×10^{-121}	7.59×10^{-708}	5.99
SSKM6 para $g(x)$			
Solución	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$\ F(x^{k+1})\ $	ACOC
aprox.			
0.8461	1.61×10^{-493}	1.45×10^{-508}	5.99

CONCLUSIONES

Un método iterativo multipaso para la solución numérica de ecuaciones no lineales fue descrito y utilizado para aproximar sus soluciones con problemas altamente no lineales evidenciando un esquema con alta rapidez de cálculo, no inferior y actualizado en el sentido de su desarrollo computacional. Los métodos seleccionados para su comparación fueron de igual manera eficientes en el tiempo de ejecución del programa y el propuesto consiguió excelentes resultados para su tiempo de implementación. Por ende, para un parámetro libre, el método propuesto en este trabajo permite tener consideraciones a trabajos futuros como análisis de la estabilidad del procedimiento iterativo y ejecución del método para sistemas de ecuaciones no lineales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ali, K. K., Mehanna, M. S., Shaalan, M. A., Nisar, K. S., Albalawi, W., & Abdel-Aty, A.-H. (2023). Analytical and numerical solutions with bifurcation analysis for the nonlinear evolution equation in (2+1)-dimensions. *Results in Physics*, 49, 106495. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106495>
- Alipour, S., & Mirzaee, F. (2020). An iterative algorithm for solving two dimensional nonlinear stochastic integral equations: A combined successive approximations method with bilinear spline interpolation. *Applied Mathematics and Computation*, 371, 124947. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124947>
- Caporale, A., Vaccaro, M. S., Barretta, R., & Luciano, R. (2025). Nonlocal elastic plate problems via iterative method. *Mechanics Research Communications*, 150, 104538. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2025.104538>
- Caprais, M., & Bergeron, A. (2025a). An iterative scheme to include turbulent diffusion in advective-dominated transport of delayed neutron precursors. *Annals of Nuclear Energy*, 215, 111251. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2025.111251>
- Caprais, M., & Bergeron, A. (2025b). An iterative scheme to include turbulent diffusion in advective - dominated transport of delayed neutro precursors. 10.
- Cordero, A., Hueso, J. L., Martínez, E., & Torregrosa, J. R. (2010). A family of iterative methods with sixth and seventh order convergence for nonlinear equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(9–10), 1490–1496. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2010.05.033>
- Erfanifar, R., Sayevand, K., & Esmaeili, H. (2020). A novel iterative method for the solution of a nonlinear matrix equation. *Applied Numerical Mathematics*, 153, 503–518. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.03.012>
- Ibrahim, A. H., & Kumam, P. (2021). Re-modified derivative-free iterative method for nonlinear monotone equations with convex constraints. *Ain Shams Engineering Journal*, 12(2), 2205–2210. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2020.11.009>
- Kodnyanko, V. (2021). Improved bracketing parabolic method for numerical solution of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 400, 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.125995>

- Kozitskiy, S. B., Trofimov, M. Y., & Petrov, P. S. (2022). On the numerical solution of the iterative parabolic equations by ETDRK pseudospectral methods in linear and nonlinear media. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 108, 106228. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.106228>
- Li, H., & Guo, Y. (2020). Numerical solution of coupled nonlinear Schrödinger equations on unbounded domains. *Applied Mathematics Letters*, 104, 106286. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106286>
- Mohanty, R. K., & Niranjana. (2024). A class of new implicit compact sixth-order approximations for Poisson equations and the estimates of normal derivatives in multi-dimensions. *Results in Applied Mathematics*, 22, 100454. <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2024.100454>
- Nirmala, A., & Kumbinarasaiah, S. (2024). Numerical solution of nonlinear Hunter - Saxton equation, Benjamin - Bona Mahony equation, and Klein - Gordon equation using Hosoya polynomial method. *Control and Optimization*, 26.
- Özban, A. Y., & Kaya, B. (2022). A new family of optimal fourth-order iterative methods for nonlinear equations. *Results in Control and Optimization*, 8(July). <https://doi.org/10.1016/j.rico.2022.100157>
- Pokusiński, B., & Kamiński, M. (2023). Numerical convergence and error analysis for the truncated iterative generalized stochastic perturbation-based finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 410, 115993. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.115993>
- Rawani, M. K., Verma, A. K., & Cattani, C. (2023). A novel hybrid approach for computing numerical solution of the time-fractional nonlinear one and two-dimensional partial integro-differential equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 118, 106986. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106986>
- Sharma, E., & Panday, S. (2022). Efficient sixth order iterative method free from higher derivatives for nonlinear equations. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 1–13. <https://doi.org/10.28919/jmcs/6950>
- Solaiman, O. S., Karim, S. A. A., & Hashim, I. (2021). Dynamical comparison of several third-order iterative methods for nonlinear equations. *Computers*,

Materials and Continua, 67(2), 1951–1962.
<https://doi.org/10.32604/cmc.2021.015344>

Thangkhenpau, G., Panday, S., Panday, B., Stoenoiu, C. E., & Jäntschi, L. (2024). Generalized high-order iterative methods for solutions of nonlinear systems and their applications. *AIMS Mathematics*, 9(3), 6161–6182.
<https://doi.org/10.3934/math.2024301>

Usman, M., Iqbal, J., Khan, A., Ullah, I., Khan, H., Alzabut, J., & Alkhawar, H. M. (2025). A new iterative multi-step method for solving nonlinear equation. *MethodsX*, 15(March). <https://doi.org/10.1016/j.mex.2025.103394>

Zhanlav, T., & Otgondorj, K. (2021). Higher order Jarratt-like iterations for solving systems of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 395, 125849. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125849>

Conflicto de intereses

El autor (o los autores) declara(n) que esta investigación no tiene conflicto de intereses y, por tanto, acepta(n) las normativas de publicación de esta revista.

Financiación

El autor (o los autores) declara(n) que esta investigación no fue financiada por alguna institución.

Declaración de contribución de los autores/as

William Alexander Ávila Aguilar: Conceptualización, Metodología, Software, Visualización, Análisis formal, Validación.

Marcos Chacón – Castro: Investigación, Redacción - borrador original, Curación de datos.

Freddy Geovanny Saldivia Monserrate: Investigación, Recursos, Redacción - revisión y edición, Supervisión, Administración del proyecto.

Sobre los autores

William Alexander Ávila Aguilar, Magíster en Ciencias de la Ingeniería Mecánica, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Guayaquil, Ecuador.

Marcos Chacón – Castro, Doctorado en Educación, Universidad Pedagógica Experimental Libertador Instituto Pedagógico Rural “Gervasio Rubio”, Venezuela, Magíster en Educación, Universidad Autónoma de Bucaramanga, Santander, Colombia, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander, Colombia.

Freddy Geovanny Saldivia Monserrate, Ingeniero Civil, Universidad de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador.

